2.6.5 Další použití lineárních lomených funkcí

Předpoklady: 2602, 2603

U předchozích funkcí jsme měli vždy s funkcemi rovnice $\Rightarrow$ existují lineární lomené rovnice a nerovnice? Jak by vypadaly?

Například takto: $\frac{1}{x-1}=1$ nebo $\frac{1}{x-1}\leq 1$.

To už známe, umíme je řešit, jen jsme jim neříkali lineární lomené.

Pedagogická poznámka: První čtyři příklady nechám studenty počítat bez společné kontroly, aby si nevšimli, jak důležité je dělat podmínku. Při řešení třetího příkladu většina studentů zapomene na podmínku a získá řešení, které se jim nepodaří v grafickém řešení najít. Řešení vzniklého rozporu nechávám nejdříve na nich, mnozí na svoji chybu přijdou.
Při kontrole příkladu 4 je třeba upozornit na prázdné kolečko pro $x=1$ i na fakt, že funkce, která vypadala jako lineární lomená se ve skutečnosti projevila jako konstantní (i když s omezeným definičním oborem).

Př. 1: Vyřeš rovnici $\frac{1}{x-1}=1$.

$\frac{1}{x-1}=1 \quad /\cdot(x-1) \quad$ podmínka: $x-1\neq 0 \Rightarrow x\neq 1$

$1=x-1$

$x=2$

$K=\{2\}$

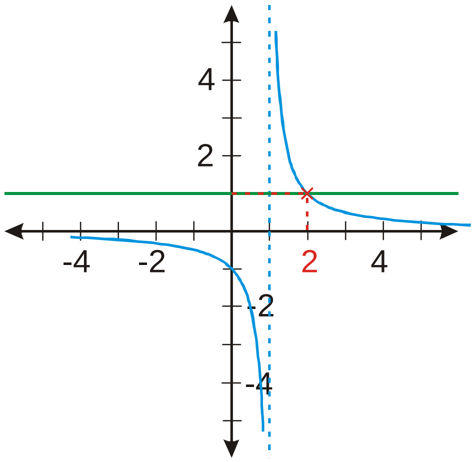
Proč podmínka?

Nesmíme dělit nulou

Teď zkusíme použít grafy:

Př. 2: Vyřeš graficky rovnici $\frac{1}{x-1}=1$.

Hledáme průsečíky grafů funkcí $y_1=\frac{1}{x-1}$ a $y_2=1$.



Z grafů je vidět, že podmínku píšeme proto, že funkce na levé straně nemá pro $x=1$ žádnou hodnotu a tudíž nemůžeme porovnávat hodnotu levé funkce s hodnotou pravé funkce.

Pedagogická poznámka: Někteří studenti nakreslí graf funkce $y=\frac{1}{x-1}-1$ a hledají jeho nulové hodnoty.

Př. 3: Vyřeš rovnici $\frac{2x-2}{x-1}=1$.

$\frac{2x-2}{x-1}=1 \quad /(x-1)$ podmínka: $x-1\neq 0 \Rightarrow x\neq 1$

$2x-2=x-1$

$x=1$

$K=\emptyset$ - hodnotu 1 pro x zakazuje podmínka

Jak je to možné, že vyšla zakázaná hodnota?

$x=1$ je řešením rovnice $2x-2=x-1$

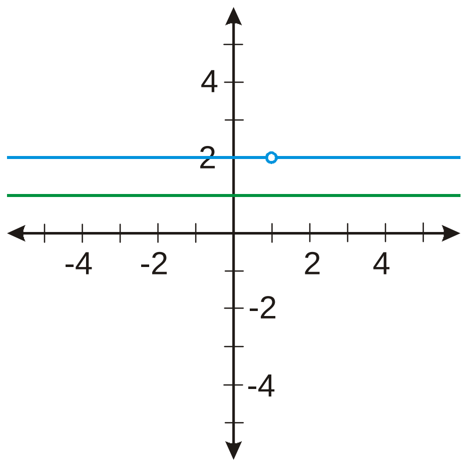
rovnici $\frac{2x-2}{x-1}=1$, můžeme na rovnici $2x-2=x-1$ pouze, když $x-1\neq 0 \Rightarrow x\neq 1$.

Podmínka je důležitá!

Př. 4: Vyřeš graficky rovnici $\frac{2x-2}{x-1}=1$.

Hledáme průsečíky grafů funkcí $y_1=\frac{2x-2}{x-1}$ a $y_2=1$.

Předpis první funkce musíme upravit $y_1=\frac{2x-2}{x-1}=2\left(\frac{x-1}{x-1}\right)=2$ $\quad x\neq 1$



Oba grafy se neprotínají, rovnice nemá řešení.

Př. 5: Vyřeš nerovnici $\frac{1}{x-1} \le 1$.

$\frac{1}{x-1} \le 1$ podmínka: $x \ne 1$

- potřebujeme násobit výrazem $(x-1)$, který může měnit znaménko $\Rightarrow$ musíme řešení rozdělit na dva intervaly.

$x-1>0 \Rightarrow x>1$

1) $x \in (-\infty;1)$ ($x=1$ nezahrnujeme, je vyloučené podmínkou)

$1 \ge x-1$ (násobíme záporným výrazem - otočení znaménka)

$2 \ge x$

$K_1 = (-\infty;1)$

2) $x \in (1;\infty)$

$1 \le x-1$

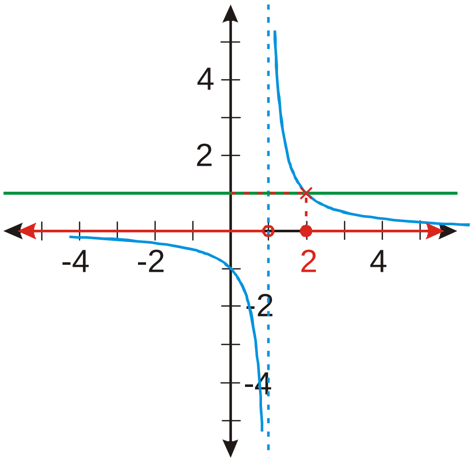
$2 \le x$

$K_2 = \langle 2;\infty)$

$K = K_1 \cup K_2 = (-\infty;1) \cup \langle 2;\infty)$

Př. 6: Vyřeš graficky nerovnici $\frac{1}{x-1} \le 1$.

Zjišťujeme, kdy je graf funkce $y_1 = \frac{1}{x-1}$ pod grafem funkce $y_2 = 1$.



$K = (-\infty;1) \cup \langle 2;\infty)$

Př. 7: Nakresli graf funkce $y = 1 + \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}$.

Zdánlivě úplně neznámý typ funkce. Zkusíme výraz upravit:

$$y = 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{x}} \qquad x \neq 0$$

$$y = 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{\frac{x-1}{x}} = 1 + \frac{x}{x-1} = 1 + \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + 1 + \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x-1} + 2$$

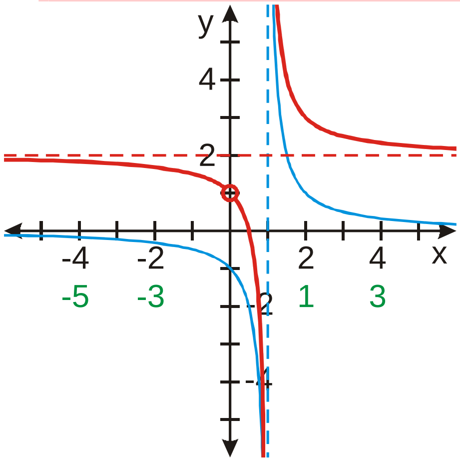
To nakreslit dokážeme. Platí: $y = \dfrac{1}{x-1} + 2 = f(x-1) + 2$

Zvolíme x.

Vypočteme $x-1$.

Nakreslíme funkci $y = f(x-1) = \dfrac{1}{x-1}$.

Nakreslíme funkci $y = f(x-1) + 2 = \dfrac{1}{x-1} + 2$.

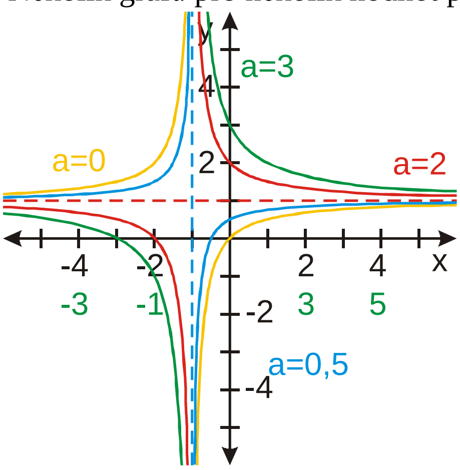


Pozor: Kvůli původnímu předpisu platí $x \neq 0 \Rightarrow$ naše funkce nemůže mít hodnotu pro $x = 0$.
Funkce $y = 1 + \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{x}}$ a funkce $y = \dfrac{1}{x-1} + 2$ nejsou to samé, mají různé definiční obory.

Pedagogická poznámka: Většina studentů přijde na nutnost úpravy předpisu, ale zapomenou vyloučit $x = 0$ z definičního oboru. Nakreslím na tabuli graf funkce $y = \dfrac{1}{x-1} + 2$ a řeknu studentům, že to není správný výsledek (ale že také není úplně špatný).

Př. 8: Zjisti, jak ovlivňuje hodnota parametru *a* graf funkce $y = \dfrac{x+a}{x+1}$.

Upravíme si předpis funkce: $y = \dfrac{x+a}{x+1} = \dfrac{x+1-1+a}{x+1} = \dfrac{x+1}{x+1} + \dfrac{-1+a}{x+1} = \dfrac{a-1}{x+1} + 1$
Parametr a vystupuje v předpisu funkce v čitateli $\Rightarrow$ ovlivňuje jak moc je funkce „přimáčknutá“ k asymptotám
Pro $a = 1$ získáme funkci $y = \dfrac{1-1}{x+1} + 1 = 1$
Několik grafů pro několik hodnot parametru *a*:



Než definitivně skončíme, musíme si poradit s jedním nedodělkem.
Tato hodina je poslední o lineárně lomených funkcích, ale zatím jsme ještě nesestavili obecnou definici lineární lomené funkce. Něco jako definice kvadratické funkce (kvadratická funkce je každá funkce, kterou je možné zapsat ve tvaru $y = ax^2 + bx + c$, kde $a \neq 0$).
Návrh: $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.
Není třeba přidat nějaké podmínky?
$c \neq 0$ - aby *x* nezmizelo ze jmenovatele
Ještě jeden problém - zlomek se nesmí zkrátit jako u funkce $y = \dfrac{2x-2}{x-1} \Rightarrow$ čitatel a jmenovatel nesmí být možné zkrátit.

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)}\Rightarrow x+\frac{b}{a}\neq x+\frac{d}{c}$$

$\frac{b}{a}\neq\frac{d}{c}$ Násobíme *ac* za předpokladu, že je různé od nuly!

$bc\neq da$

Jaký bude definiční obor?

Vše, pokud ve jmenovateli není nula $\Rightarrow$ $cx+d\neq 0\Rightarrow x\neq -\frac{d}{c}$.

Lineární lomená funkce je každá funkce na množině $R-\left\{-\frac{d}{c}\right\}$ zadaná ve tvaru $y=\frac{ax+b}{cx+d}$, kde $c\neq 0$ a $bc\neq da$.

Pedagogická poznámka: Jedním z cílů hodiny je vyzkoušet (a studentům to říkám), jaký mají postřeh na zajímavé věci. Jde hlavně o to, jestli si všimnou v příkladu 4 zmenšení definičního oboru (použito znovu v příkladu 6) a vykrácení zlomku (použito při sestavování definice lineárně lomené funkce). Aby na sestavování definice zbylo dost času, je nutné skončit s počítáním příkladů nejpozději 5 minut před koncem hodiny (spíše však dříve).

Př. 9: Petáková:
strana 58/cvičení 11 b) c)
strana 58/cvičení 13
strana 58/cvičení 15 c) d)

Shrnutí: Graf lineární lomené funkce můžeme využít při řešení některých rovnic nebo nerovnic.